Cours du 22.03.2021
lundi, 22 mars 2021 18:33

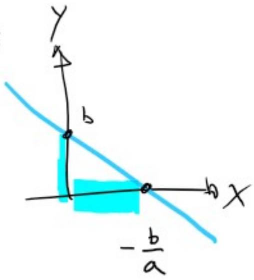
Date provisoire (à confirmer) de l'examen 26 Avril 2021 !!
Champ : Vecteurs ET matrices !

En 2D, comment peut-on définir une droite :

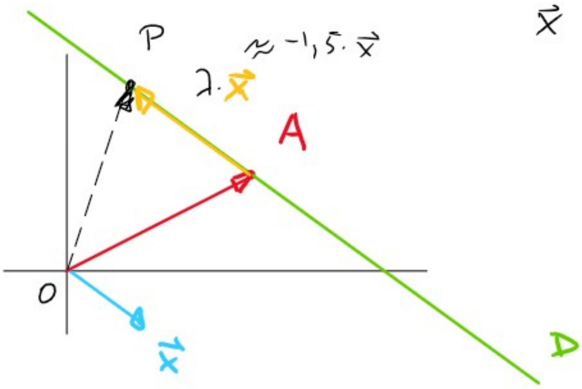
pente ↓ ordon. origine ↙

$$y = ax + b$$

fonction affine



Nous travaillons avec des VECTEURS, donc, comment l'écrire ??



$\vec{x}$ et A sont CONNUS

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\cdot\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases}$$

Equations paramétriques de la droite D parallèle à $\vec{x}$ passant par A

Pour tout point qui se trouve sur la droite D, il existe un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les équations paramétriques sont vérifiées !

$$\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ \cap \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{p_1 - a_1}{x_1} \end{cases}$$

⚠ $x_1 \neq 0$

$$\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{p_1 - a_1}{x_1} & ⚠\ x_1 \neq 0 \\ \lambda = \dfrac{p_2 - a_2}{x_2} & ⚠\ x_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \left[\frac{p_1 - a_1}{x_1} - \frac{p_2 - a_2}{x_2} = 0 \right] \times (x_1 \cdot x_2)$$

$$x_2 (\underbrace{p_1 - a_1) - x_1 (p_2}_{\text{inconnu !}} - a_2) = 0$$

$$\boxed{x_2 p_1 - x_1 p_2 + [x_1 a_2 - x_2 a_1] = 0} \quad \text{si } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in D$$

Equation cartésienne de la droite D de direction $\vec{x}$ passant par A.

$$\square p_1 - \triangle p_2 + ⭐ = 0 \qquad \text{équ. cart.}$$

$$y = ax + b \Rightarrow ax - y + b = 0.$$

Exercice : trouvez les équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne de la droite D passant par le point A et de direction $\vec{x}$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases} \qquad x_2 p_1 - x_1 p_2 + [x_1 a_2 - x_2 a_1] = 0$$

Equations paramétriques :

Equations cartésienne

$$\begin{cases} p_1 = 2 - \lambda \\ p_2 = 7 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad 2p_1 + p_2 - 11 = 0$$

Vérifions que A est sur la droite : $2 \cdot a_1 + a_2 - 11 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 - 11 = 4 + 7 - 11 = 0.$

Les points suivants sont-ils sur la droite ?

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$2 \cdot 3 + 16 - 11 = 22 - 11 = 11 \neq 0$

PAS sur la droite !

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = A + 1 \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 1 + 1 \cdot 9 - 11 = 2 + 9 - 11 = 0$

oui : il est sur D.

Intersections de 2 droites :

$$\begin{cases} D_1 : \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma = 0 \\ D_2 : \delta p_1 + \varepsilon p_2 + \theta = 0 \end{cases}$$

Point d'intersection est celui qui satisfait D_1 et D_2 en même temps

$$\boxed{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma = \delta p_1 + \varepsilon p_2 + \theta}$$

Equations cartésienne

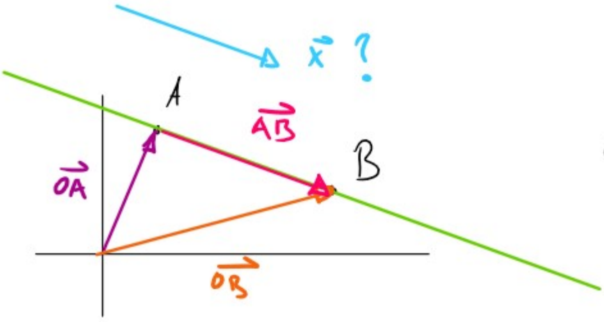
$3 \cdot (2p_1 + p_2 - 11) = 0 \cdot 3$? Il y a en fait une INFINITE

$$3 \cdot (2p_1 + p_2 - 11) = 0 \cdot 3$$

$$6p_1 + 3p_2 - 33 = 0$$

Il y a en fait une INFINITE d'équations cartésiennes pour une même droite !!!

Pour définir une droite de manière unique, il faut :
- Un vecteur directeur et un point,
- Deux points,
- Un vecteur PERPENDICULAIRE et un point.



$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

N'importe quel point de la droite est décrit par A (ou B) ET le vecteur $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

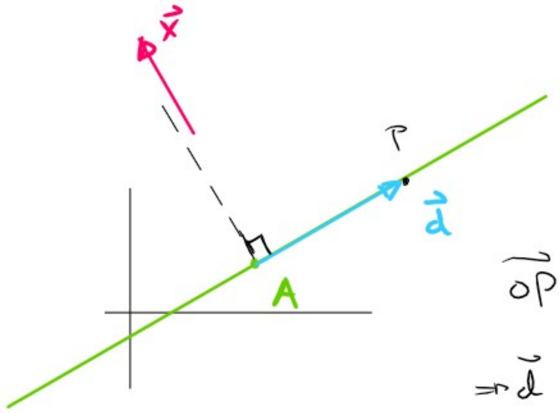
On peut alors retrouver les équations paramétriques ET l'équation cartésienne de D.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda (b_1 - a_1) \\ p_2 = a_2 + \lambda (b_2 - a_2) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Système d'équation paramétrique pour la droite D passant par les 2 points A et B.

La droite D passant par le point A et PERPENDICULAIRE à $\vec{x}$



$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{d}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$\vec{d} \perp \vec{x}$$

(ils sont PERPENDICULAIRES)

$$\measuredangle = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ RAD}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{d}\|} = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{d} \rangle = x_1 d_1 + x_2 d_2 = 0$$

$$\langle \vec{x}, \vec{d} \rangle = 0 = \langle \vec{x}, \vec{OP} - \vec{OA} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= x_1 \cdot (p_1 - a_1) + x_2 \cdot (p_2 - a_2)$$

$$= \boxed{x_1 p_1 + x_2 p_2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2) = 0} \quad \Rightarrow \vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Equation cartésienne de la droite D passant par A et de direction PERPENDICULAIRE à $\vec{x}$.

$$\boxed{x_2 p_1 - x_1 p_2 + [x_1 a_2 - x_2 a_1] = 0} \quad \vec{J} = (x_1$$

$$\boxed{x_2 p_1 - x_1 p_2 + [x_1 a_2 - x_2 a_1] = 0} \qquad \vec{d}_{/\!/} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Equation cartésienne de la droite D de direction $\vec{x}$ passant par A.

$$\langle \vec{d}_{/\!/}, \vec{d}_{\perp} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= x_1(-x_2) + x_2 \cdot x_1 = 0 \,!$$

$$\vec{d}_{/\!/} \perp \vec{d}_{\perp}$$

Comment trouver un vecteur PERPENDICULAIRE à un vecteur $\vec{x}$ quelconque ?

Permuter les composantes, et INVERSER le signe de l'une des deux !

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \perp \vec{x}$$